LECCIÓN CONDENSADA

6.1 Resolución de sistemas de ecuaciones

En esta lección

- representarás situaciones con **sistemas de ecuaciones**
- usarás tablas y gráficas para **resolver sistemas de ecuaciones lineales**

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de dos o más ecuaciones con las mismas variables. Una solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores que hacen que todas las ecuaciones sean ciertas. Lee el ejemplo de tu libro y luego lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO

Según el plan de llamadas de larga distancia CuandoQuiera, se cobra $4.80 por mes más 5¢ el minuto. Según el plan HablaMás, se cobra 9¢ el minuto y no hay cargo mensual. ¿Para qué cantidad de minutos el cobro de los dos planes es el mismo?

a. Escribe un sistema de dos ecuaciones para modelar esta situación.

b. Resuelve el sistema mediante la creación de una tabla. Explica el significado práctico de la solución y localiza la solución en una gráfica.

Solución

a. Asignemos que x sea el número de minutos y y sea el cobro en dólares. El cobro es el cargo mensual más la tasa por el número de minutos. Aquí se muestra el sistema de ecuaciones.

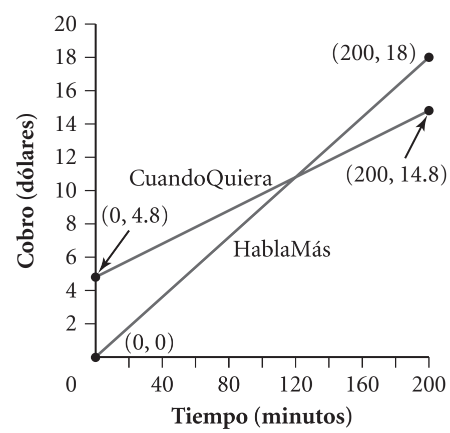
$$\begin{cases} y = 4.80 + 0.05x & \text{Plan CuandoQuiera} \\ y = 0.09x & \text{Plan HablaMás} \end{cases}$$

b. Crea una tabla a partir de las ecuaciones. Coloca en ella los valores del tiempo y calcula el cobro según cada plan. En la tabla se muestra que cuando $x = 120$, los dos valores de y son 10.80. Como el punto (120, 10.80) satisface ambas ecuaciones, ésta es la solución del sistema. La solución significa que ambos planes cobran $10.80 por 120 minutos de llamadas de larga distancia.

Planes de larga distancia

Tiempo (min)	CuandoQuiera $y = 4.80 + 0.05x$	HablaMás $y = 0.09x$
0	4.80	0
30	6.30	2.70
60	7.80	5.40
90	9.30	8.10
120	10.80	10.80
150	12.30	13.50

En la gráfica, la solución es el punto donde las dos rectas se intersecan.

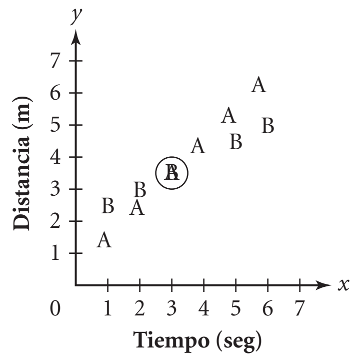


(continúa)

Lección 6.1 • Resolución de sistemas de ecuaciones (continuación)

Investigación: ¿Dónde se encontrarán?

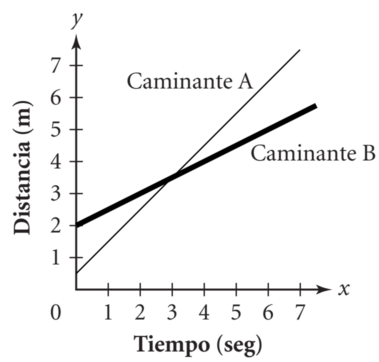
Pasos 1–4 En esta investigación, dos estudiantes caminan a lo largo de un trayecto de 6 metros. El Caminante A empieza en la marca de 0.5 metros y camina hacia la marca de 6 metros a tasa de 1 m/seg. El Caminante B empieza en la marca de 2 metros y camina hacia la marca de 6 metros a tasa de 0.5 m/seg. Aquí se muestra una gráfica de los datos obtenidos por un grupo.



Pasos 5–7 Puedes modelar esta situación con un sistema de ecuaciones y después resolver el sistema para determinar cuándo y dónde el Caminante A rebasa al Caminante B. Si x representa el tiempo en segundos y y representa la distancia desde la marca de 0 metros, el sistema es

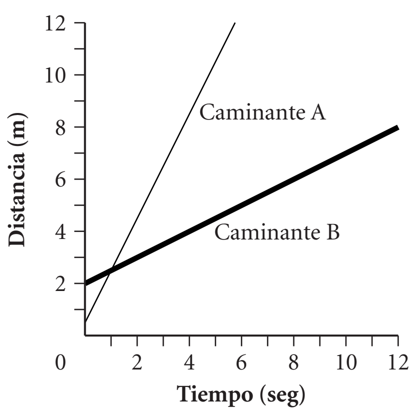
$$\begin{cases} y = 0.5 + x & \text{Caminante A} \\ y = 2 + 0.5x & \text{Caminante B} \end{cases}$$

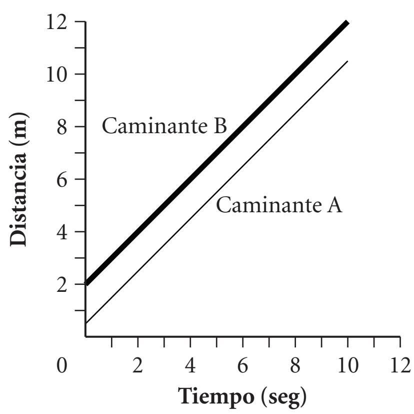
Aquí se presentan unas gráficas de las ecuaciones en los mismos ejes. Las gráficas se intersecan en (3, 3.5), lo que indica que el Caminante A rebasa al Caminante B después de 3 segundos, cuando ambos caminantes están en la marca de 3.5 metros.



Pasos 8–10 Si el Caminante A se desplazara más rápido que 1 m/seg, la pendiente de la recta del Caminante A aumentaría, y el punto de intersección se acercaría al origen, indicando que el Caminante A rebasa al Caminante B más pronto y más cerca a la marca de 0 metros.

Si los dos caminantes se desplazaran a la misma velocidad, nunca se encontrarían. Las pendientes de las rectas serían iguales, de modo que las rectas serían paralelas. El sistema de ecuaciones para esta situación no tiene solución.





Si ambos caminantes se desplazaran a la misma velocidad desde la misma marca inicial, las dos rectas serían idénticas. Cada punto de la recta es una solución del sistema, lo que indica que los caminantes siempre están en el mismo lugar al mismo tiempo.

En la investigación se muestra que dos rectas pueden intersecarse en cero puntos, en un punto, o en todos los puntos. Entonces, un sistema de ecuaciones lineales puede tener cero, una, o una infinidad de soluciones.

LECCIÓN CONDENSADA

6.2

Resolución de sistemas de ecuaciones mediante la sustitución

En esta lección

- representarás situaciones con **sistemas de ecuaciones**
- usarás el **método de sustitución** para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Si usas una gráfica o una tabla para resolver un sistema de ecuaciones, tal vez sólo puedas encontrar una solución aproximada. El **método de sustitución** te permite encontrar la solución exacta de un sistema. Lee el Ejemplo A en tu libro, en el cual se explica cómo resolver un sistema usando el método de sustitución.

Investigación: Todo amarrado

Empieza con una cuerda delgada y una gruesa, cada una de 1 metro de largo. Si haces unos nudos en cada cuerda y mides la longitud después de cada nudo, podrías obtener datos como estos.

Cuerda delgada	
Número de nudos	Longitud (cm)
0	100
1	94
2	88
3	81.3
4	75.7
5	69.9
6	63.5

Cuerda gruesa	
Número de nudos	Longitud (cm)
0	100
1	89.7
2	78.7
3	68.6
4	57.4
5	47.8
6	38.1

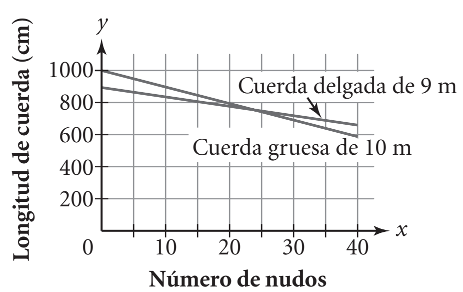
Usa las técnicas que aprendiste en el Capítulo 5 para escribir una ecuación para modelar los datos de cada cuerda.

Un modelo posible para la cuerda delgada es $y = 100 - 6x$, donde x es el número de nudos y y es la longitud en centímetros. La intersección y, 100, es la longitud de la cuerda antes de hacer cualquier nudo. La pendiente, -6, es el cambio en longitud después de cada nudo.

Un modelo posible para la cuerda gruesa es $y = 100 - 10.3x$. Esta ecuación indica que la longitud inicial es 100 cm y que ésta disminuye en 10.3 cm con cada nudo.

Supón que la longitud inicial de la cuerda delgada es 9 m y que la longitud inicial de la cuerda gruesa es 10 m. Este sistema de ecuaciones modela esta situación.

$$\begin{cases} y = 900 - 6x & \text{Longitud de la cuerda delgada} \\ y = 1000 - 10.3x & \text{Longitud de la cuerda gruesa} \end{cases}$$



Para estimar la solución de este sistema, haz una gráfica y estima el punto de intersección. El punto de intersección es aproximadamente (23, 760).

También puedes encontrar la solución usando el método de sustitución. Sustituye y en la segunda ecuación por $900 - 6x$, y resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} y &= 1000 - 10.3x && \text{Segunda ecuación original.} \\ 900 - 6x &= 1000 - 10.3x && \text{Sustituye } y \text{ por } 900 - 6x. \\ 900 &= 1000 - 4.3x && \text{Suma } 6x \text{ a ambos lados y simplifica.} \\ -100 &= -4.3x && \text{Resta 1000 de ambos lados.} \\ 23.26 &\approx x && \text{Divide ambos lados entre } -4.3. \end{aligned}$$

(continúa)

Como x representa el número de nudos, la solución debe ser un número entero. Así que redondea x a 23. Cuando x es 23, y es aproximadamente 760. Entonces, la solución es (23, 760). Esto significa que, cuando se han hecho 23 nudos en cada cuerda, las cuerdas tienen más o menos la misma longitud, 760 cm.

Piensa en cómo cambiarían los modelos si las dos cuerdas tuvieran el mismo grosor. En esta situación las pendientes serían iguales, de modo que las rectas serían paralelas. En este caso, el sistema no tendría soluciones. En otras palabras, las cuerdas nunca tendrían la misma longitud.

Si las cuerdas tuvieran el mismo grosor y la misma longitud inicial, las ecuaciones y las rectas serían iguales. En este caso existen muchas soluciones. Las cuerdas tendrían la misma longitud después de hacerles cualquier número de nudos.

Cuando resuelves un sistema usando el método de sustitución, en ocasiones necesitas reescribir una de las ecuaciones, antes de que puedas sustituir. En el Ejemplo B de tu libro se muestra cómo resolver un sistema cuando ambas ecuaciones están dadas en forma estándar. Lee ese ejemplo y el texto siguiente atentamente. Después lee el ejemplo que sigue en este texto.

EJEMPLO Usa el método de sustitución para resolver este sistema.

$$\begin{cases} 3s = -5t - 3 \\ 2s - 6 = t + 5 \end{cases}$$

Solución Reescribe una de las ecuaciones de modo que una variable quede sola en un lado.

$2s - 6 = t + 5$	Segunda ecuación original.
$2s - 11 = t$	Resta 5 de ambos lados.

Ahora sustituye t por $2s - 11$ en la primera ecuación y resuelve para s.

$3s = -5(2s - 11) - 3$	Sustituye t por $2s - 11$.
$3s = -10s + 55 - 3$	Distribuye el -5.
$3s = -10s + 52$	Resta 3 de 55.
$13s = 52$	Suma $10s$ a ambos lados.
$s = 4$	Divide ambos lados entre 13.

Para hallar el valor de t, sustituye s por 4 en cualquiera de las ecuaciones y resuelve para t. Debes encontrar que la solución del sistema es $(s, t) = (4, -3)$. Verifica esta solución sustituyéndola en ambas ecuaciones.

LECCIÓN CONDENSADA 6.3

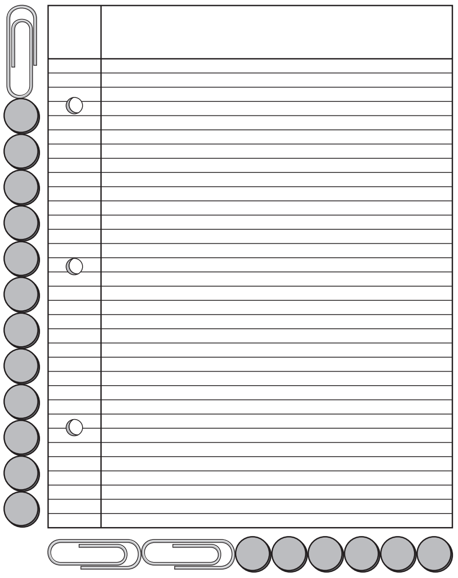
Resolución de sistemas de ecuaciones mediante la eliminación

En esta lección

- representarás situaciones con **sistemas de ecuaciones**
- usarás el **método de eliminación** para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Lee el texto que está al inicio de la Lección 6.3 en tu libro. En él se explica que puedes sumar dos ecuaciones para obtener otra ecuación verdadera. Luego lee el Ejemplo A atentamente y asegúrate de que lo entiendes. En el ejemplo, la variable s se elimina sólo sumando las ecuaciones. Como verás en la investigación, en ocasiones, el uso del **método de eliminación** requiere un poco más de trabajo.

Investigación: Clips y pennies



Coloca un clip al lado de una hoja de papel, por el borde más largo. Luego alinea suficientes *pennies* (monedas de un centavo) para completar la longitud de 11 pulgadas. Si usas un clip tamaño jumbo, debes encontrar que necesitas 12 pennies.

Coloca dos clips al lado de la hoja, por el borde corto, y agrega suficientes pennies para completar su longitud de 8.5 pulgadas. Con clips jumbo necesitarás 6 pennies.

Si C es la longitud de un clip y P es el diámetro de un penny, puedes escribir este sistema de ecuaciones para representar la situación.

$$\begin{cases} C + 12P = 11 & \text{Lado mayor} \\ 2C + 6P = 8.5 & \text{Lado menor} \end{cases}$$

Observa que no puedes eliminar una variable al sumar las dos ecuaciones originales. Sin embargo, mira lo que pasa cuando multiplicas ambos lados de la primera ecuación por -2.

$$\begin{cases} C + 12P = 11 \\ 2C + 6P = 8.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2C - 24P = -22 \\ 2C + 6P = 8.5 \end{cases}$$

Como multiplicaste ambos lados de la primera ecuación por el mismo número, la nueva ecuación tiene las mismas soluciones que la original. Ahora puedes eliminar la variable C sumando las dos ecuaciones del nuevo sistema.

$$\begin{array}{rll} -2C - 24P &= -22 & \\ 2C + 6P &= 8.5 & \\ \hline -18P &= -13.5 & \text{Suma las ecuaciones.} \\ P &= 0.75 & \text{Divide entre } -18. \end{array}$$

Para encontrar el valor de C, sustituye P por 0.75 en cualquier ecuación y resuelve para C.

$C + 12(0.75) = 11$ ó $2C + 6(0.75) = 8.5$

(continúa)

Lección 6.3 • Resolución de sistemas de ecuaciones mediante la eliminación (continuación)

Debes encontrar que C es 2. Asegúrate de verificar la solución sustituyendo 0.75 por P y 2 por C en ambas ecuaciones.

$2 + 12(0.75) = 11$ y $2(2) + 6(0.75) = 8.5$

La solución (0.75, 2) significa que un penny tiene un diámetro de 0.75 pulgadas y el clip tiene una longitud de 2 pulgadas.

Existen varias formas en que podrías resolver el sistema original de ecuaciones. Por ejemplo, en lugar de multiplicar la primera ecuación por -2, podrías haber multiplicado la segunda ecuación por -2. Entonces, el coeficiente de P sería -12 en ambas ecuaciones, y podrías eliminar P al sumar las ecuaciones.

Lee el resto de la lección en tu libro. A continuacíon se presenta un ejemplo más.

EJEMPLO En la tienda de música Marli's Discount Music Mart, todos los discos compactos tienen el mismo precio y todos los casetes tienen el mismo precio. Rashid compró seis discos y cinco casetes por $117.78. Quincy compró cuatro discos y nueve casetes por $123.74. Escribe y resuelve un sistema de ecuaciones para encontrar el precio de un disco y el de un casete.

► ***Solución*** Si c es el precio de un disco y t es el precio de un casete, entonces el problema puede modelarse con este sistema.

$$\begin{cases} 6c + 5t = 117.78 & \text{La compra de Rashid} \\ 4c + 9t = 123.74 & \text{La compra de Quincy} \end{cases}$$

Si multiplicas la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por -3, serás capaz de sumar las ecuaciones para eliminar c.

$$\begin{array}{rrl} 6c + 5t = 117.78 \rightarrow & 12c + 10t = 235.56 & \text{Multiplica ambos lados por 2.} \\ 4c + 9t = 123.74 \rightarrow & \underline{-12c - 27t = -371.22} & \text{Multiplica ambos lados por } -3. \\ & -17t = -135.66 & \text{Suma las ecuaciones.} \\ & t = 7.98 & \text{Divide.} \end{array}$$

Para encontrar el valor de c, sustituye t por 7.98 en cualquier ecuación y resuelve para t.

$$\begin{array}{rl} 6c + 5t = 117.78 & \text{Primera ecuación original.} \\ 6c + 5(7.98) = 117.78 & \text{Sustituye } t \text{ por 7.98.} \\ 6c + 39.90 = 117.78 & \text{Multiplica.} \\ 6c = 77.88 & \text{Resta 39.90 de ambos lados.} \\ c = 12.98 & \text{Divide ambos lados entre 6.} \end{array}$$

Los casetes cuestan $7.98 y los discos cuestan $12.98. Asegúrate de verificar esta solución sustituyéndola en ambas ecuaciones originales.

LECCIÓN CONDENSADA

6.4

Resolución de sistemas de ecuaciones mediante el uso de matrices

En esta lección

- representarás situaciones con **sistemas de ecuaciones**
- usarás **matrices** para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Ya sabes cómo resolver sistemas de ecuaciones con tablas y gráficas, y usando los métodos de sustitución y eliminación. También se pueden resolver sistemas de ecuaciones usando matrices. En las páginas 331–332 de tu libro se explica cómo representar un sistema de ecuaciones con una matriz y luego usar operaciones de fila para encontrar la solución. Lee ese texto y el Ejemplo A con mucha atención.

Investigación: Diagonalización

Considera este sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 6x - 5y = 9 \end{cases}$$

Como las ecuaciones están en forma estándar, puedes representar el sistema con una matriz. Escribe los numerales de la primera ecuación en la primera fila y los numerales de la segunda ecuación en la segunda fila.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 6 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

Para resolver la ecuación, realiza operaciones de fila para obtener el número 1 en la diagonal de la matriz y el número 0 arriba y abajo de la diagonal, como se muestra aquí.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$$

Para obtener un 0 como primera entrada de la segunda fila, suma -3 multiplicado por la primera fila al segundo renglón. Este paso es parecido a usar el método de eliminación para suprimir la x de la segunda ecuación.

$$\begin{array}{llrrrr} -3 \text{ veces fila 1} & \rightarrow & & -6 & -3 & -33 \\ + \text{ fila 2} & \rightarrow & + & 6 & -5 & 9 \\ \hline \text{Nueva fila 2} & \rightarrow & & 0 & -8 & -24 \end{array}$$

Nueva matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 0 & -8 & -24 \end{bmatrix}$$

Para obtener 1 como segunda entrada de la segunda fila, divide ese renglón entre -8.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(continúa)

De esta segunda fila puedes ver que $y = 3$. Ahora resta la segunda fila de la primera para obtener un 0 como segunda entrada de la primera fila. Esto es parecido a sustituir y por 3 en la primera ecuación para obtener $2x = 8$.

$$\begin{array}{lcrrrr} \text{Fila 1} & \rightarrow & & 2 & 1 & 11 \\ -\ \text{fila 2} & \rightarrow & - & 0 & 1 & 3 \\ \hline \text{Nueva fila 1} & \rightarrow & & 2 & 0 & 8 \end{array}$$

Nueva matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener un 1 como primera entrada de la primera fila, divide la fila entre 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora puedes ver que $x = 4$ y $y = 3$. Puedes verificar esta solución sustituyéndola en la ecuación original.

En el Ejemplo B de tu libro se muestra que las matrices son útiles para resolver sistemas de ecuaciones en los que hay números grandes. Aquí se presenta otro ejemplo.

EJEMPLO

En un encuentro de fútbol americano colegial, los estudiantes pagaron \$12 por boleto y los no estudiantes pagaron \$18 por boleto. El número total de estudiantes que acudieron al partido fue de 1,430 más que el número de no estudiantes. La venta total de todos los boletos fue de \$67,260. ¿Cuántos de los que fueron al partido eran estudiantes y cuántos no?

▶ ***Solución***

Si S es el número de estudiantes y N es el número de no estudiantes, entonces puedes representar la situación con los siguientes sistema y matriz.

$$\begin{cases} S - N = 1{,}430 \\ 12S + 18N = 67{,}260 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1{,}430 \\ 12 & 18 & 67{,}260 \end{bmatrix}$$

Usa operaciones de fila para hallar la solución.

Suma -12 veces la fila 1 a la fila 2 para obtener una nueva fila 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1{,}430 \\ 0 & 30 & 50{,}100 \end{bmatrix}$$

Divide la fila 2 entre 30.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1{,}430 \\ 0 & 1 & 1{,}670 \end{bmatrix}$$

Suma la fila 2 a la fila 1 para obtener una nueva fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3{,}100 \\ 0 & 1 & 1{,}670 \end{bmatrix}$$

La matriz final muestra que $S = 3{,}100$ y $N = 1{,}670$. Así que 3,100 estudiantes y 1,670 no estudiantes acudieron al partido. Puedes verificar esta solución sustituyéndola en ambas ecuaciones originales.

LECCIÓN CONDENSADA

6.5 Desigualdades con una variable

En esta lección

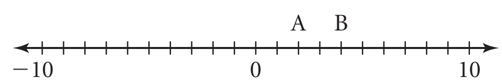
- escribirás **desigualdades** para representar situaciones
- aprenderás cómo aplicar operaciones a ambos lados de una desigualdad afecta la dirección del símbolo de desigualdad
- resolverás un problema al escribir y **resolver una desigualdad**

Una **desigualdad** es una proposición de que una cantidad es menor o mayor que otra. Las desigualdades se escriben usando los símbolos $<$, $>$, $\leq$, y $\geq$. Lee el texto de la página 339 de tu libro, que ofrece varios ejemplos de la vida cotidiana y cómo escribirlos como desigualdades.

Al igual que con las ecuaciones, puedes resolver desigualdades aplicando las mismas operaciones en ambos lados. Sin embargo, como aprenderás en la investigación, necesitas tener cuidado con respecto a la dirección del símbolo de desigualdad.

Investigación: Pisa la recta

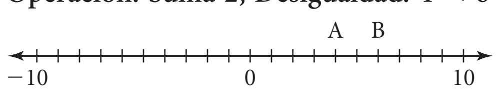
En esta investigación, dos caminantes se encuentran parados sobre una recta numérica. Caminante A empieza en el número 2 y Caminante B empieza en el número 4. Puedes representar esta situación con la desigualdad $2 < 4$.



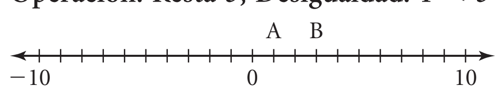
Pasos 1–4 Cuando un locutor anuncia una operación, los caminantes la realizan en sus números y se mueven a sus nuevas posiciones según el resultado. Las nuevas posiciones están representadas por una desigualdad, con la posición de Caminante A a la izquierda y la posición de Caminante B a la derecha.

En las ilustraciones siguientes se muestran las posiciones de los caminantes después de las primeras dos operaciones, junto con la correspondiente desigualdad.

Operación: Suma 2; Desigualdad: $4 < 6$



Operación: Resta 3; Desigualdad: $1 < 3$



En esta tabla se muestran los resultados de las operaciones restantes.

Operación	Posición de Caminante A	Símbolo de desigualdad	Posición de Caminante B
Suma -2	-1	$<$	1
Resta -4	3	$<$	5
Multiplica por 2	6	$<$	10
Resta 7	-1	$<$	3
Multiplica por -3	3	$>$	-9
Suma 5	8	$>$	-4
Divide entre -4	-2	$<$	1
Resta 2	-4	$<$	-1
Multiplica por -1	4	$>$	1

(continúa)

Pasos 5–9 Observa que, cuando se suma o se resta un número de las posiciones de los caminantes, la dirección de la desigualdad (o sea, las posiciones relativas de los caminantes) permanece igual. La dirección de una desigualdad también permanece igual cuando las posiciones se multiplican o se dividen por un número positivo. Sin embargo, cuando las posiciones se multiplican o se dividen por un número negativo, la dirección de la desigualdad (o sea, las posiciones relativas de los caminantes) se invierte.

Verifica estos descubrimientos iniciando otra desigualdad y aplicando las operaciones en ambos lados. Deberás llegar a la conclusión que *la dirección del símbolo de desigualdad se invierte sólo cuando multiplicas o divides por un número negativo.*

Lee el Ejemplo A en tu libro, que muestra cómo graficar soluciones de desigualdades en una recta numérica. Después lee el Ejemplo B, donde se aplica lo que aprendiste en la investigación para resolver una desigualdad. Aquí se presenta un ejemplo más.

EJEMPLO A Jack toma el autobús jugar a bolos. Tiene \$15 cuando llega ahí. Le cuesta \$2.25 por juego. Si Jack necesita \$1.50 para tomar el autobús de regreso a casa, ¿cuántos juegos puede jugar? Resuelve este problema escribiendo y resolviendo una desigualdad.

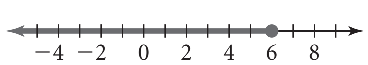
► ***Solución*** Asignemos que g sea el número de juegos que Jack puede jugar. Sabemos que la cantidad que Jack tiene al principio, menos la cantidad que gasta jugando, debe ser al menos (es decir, mayor que o igual a) \$1.50. Entonces, podemos escribir esta desigualdad.

$$\underbrace{15}_{\text{Cantidad que Jack tiene al principio}} - \underbrace{2.25g}_{\text{Costo por jugar } g \text{ juegos}} \geq \underbrace{1.50}_{\text{Viaje en autobús}}$$

Ahora resuelve la desigualdad.

$15 - 2.25g \geq 1.50$	Desigualdad original.
$15 - 15 - 2.25g \geq 1.50 - 15$	Resta 15 de ambos lados.
$-2.25g \geq -13.50$	Resta.
$\frac{-2.25g}{-2.25} \leq \frac{-13.50}{-2.25}$	Divide ambos lados entre -2.25, e **invierte el símbolo de desigualdad.**
$g \leq 6$	Divide.

Jack puede jugar 6 juegos o menos. Aquí, graficamos $g \leq 6$ en una recta numérica.



LECCIÓN CONDENSADA

6.6

Gráficas de desigualdades con dos variables

En esta lección

- **graficarás desigualdades lineales** con dos variables

Sabes cómo graficar ecuaciones lineales con dos variables, como $y = 6 - 3x$. En esta lección aprenderás a graficar desigualdades lineales con dos variables, como $y < 6 - 3x$ y $y \geq 6 - 3x$.

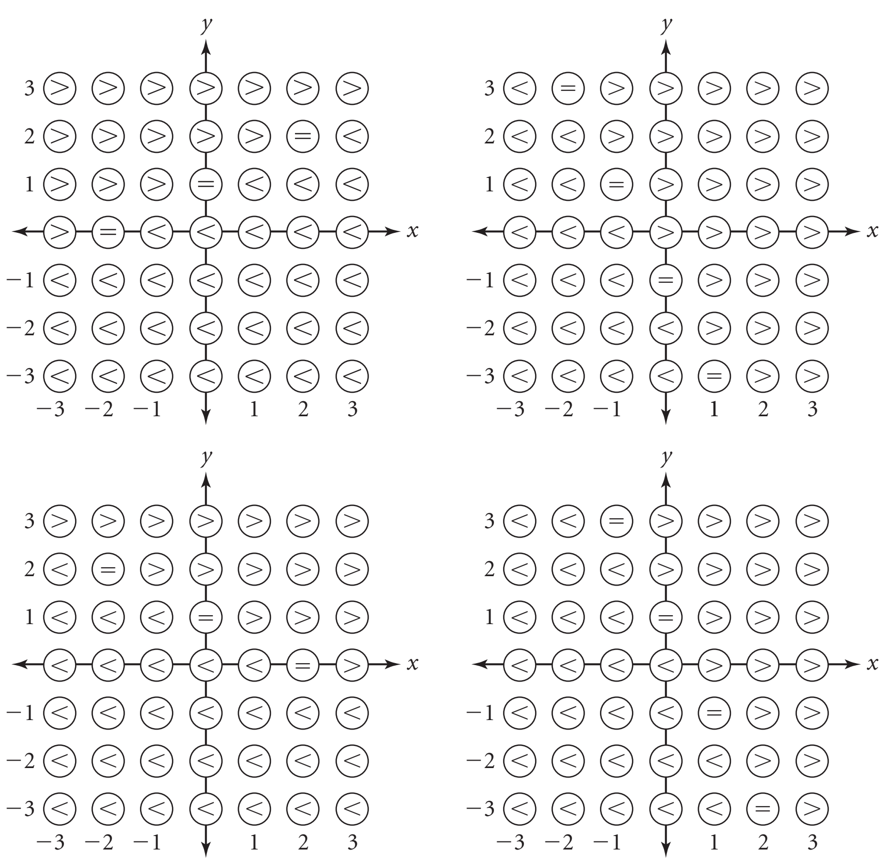
Investigación: Graficación de desigualdades

Para llevar a cabo esta investigación, necesitarás una hoja de trabajo de papel cuadriculado como la que se encuentra en la página 347 de tu libro.

Escoge una de las proposiciones de la lista en la página 347. Por cada punto mostrado con un círculo en la hoja de trabajo, sustituye las coordenadas del punto en la proposición, y después llena el círculo con el símbolo de relación $<$, $>$, o $=$, que hace que la proposición sea verdadera. Por ejemplo, si eliges la proposición $y \;\square\; -1 - 2x$, haz lo siguiente para el punto (3, 2):

$y \;\square\; -1 - 2x$	Proposición original.
$2 \;\square\; -1 - 2(3)$	Sustituye x por 3 y y por 2.
$2 \;\square\; -7$	Resta.

Como el símbolo $>$ hace que la proposición sea verdadera, pon $>$ en el círculo del punto (3, 2). He aquí las cuadrículas para las cuatro proposiciones.



(continúa)

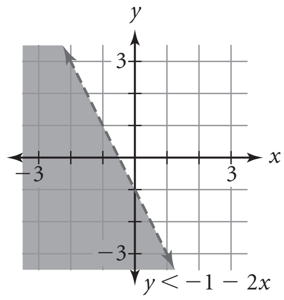
Observa que para cada proposición, los círculos que contienen los signos igual forman una recta. Los círculos que están por arriba de la recta tienen el símbolo $>$ y los círculos que están por debajo de la recta tienen el símbolo $<$.

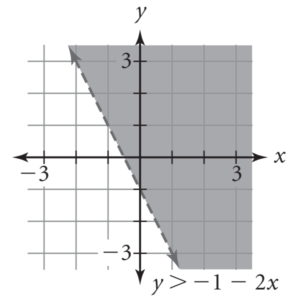
Elige una de las proposiciones y prueba un punto con coordenadas fraccionarias o decimales. Por ejemplo, en la cuadrícula correspondiente a $y \; \square \; -1 - 2x$, el punto $(-2.2, 1.5)$ está debajo de la recta de signos igual. Sustituye las coordenadas en la proposición.

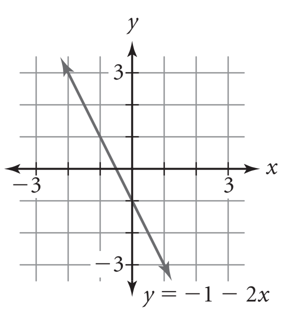
$y \; \square \; -1 - 2x$	Proposición original.
$1.5 \; \square \; -1 - 2(-2.2)$	Sustituye x por -2.2 y y por 1.5.
$1.5 \; \square \; 3.4$	Resta.
$1.5 < 3.4$	Inserta el símbolo apropiado.

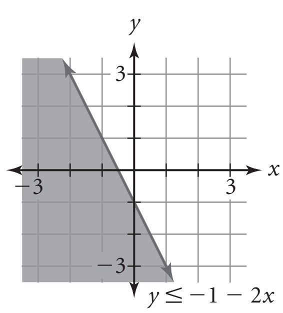
La proposición resultante obtiene un símbolo $<$, al igual que los otros puntos que están debajo de la recta de los signos igual.

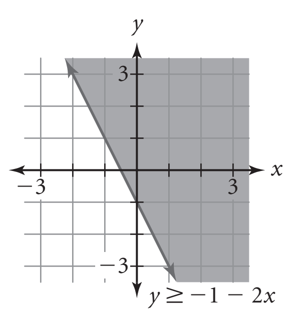
Aquí se muestran las gráficas de $y < -1 - 2x$, $y > -1 - 2x$, $y = -1 - 2x$, $y \leq -1 - 2x$, y $y \geq -1 - 2x$. En cada gráfica las regiones sombreadas incluyen los puntos que hacen verdadera la proposición. La recta punteada indica que la recta *no* está incluida en la gráfica. Una recta sólida indica que la recta está incluida.











Construye gráficas parecidas para las otras desigualdades. Observa:

- Las gráficas de las desigualdades en la forma $y >$ *expresión* y $y \geq$ *expresión* están sombreadas arriba de la recta.
- Las gráficas de las desigualdades en la forma $y <$ *expresión* y $y \leq$ *expresión* están sombreadas debajo de la recta.
- Las gráficas de las desigualdades en la forma $y \leq$ *expresión* y $y \geq$ *expresión* requieren una recta sólida.
- Las gráficas de las desigualdades en la forma $y <$ *expresión* y $y >$ *expresión* requieren una recta punteada.

Lee el resto de la lección y el ejemplo en tu libro. Cuando hayas terminado, debes ser capaz de graficar cualquier desigualdad lineal.

LECCIÓN CONDENSADA

6.7

Sistemas de desigualdades

En esta lección

- **graficarás soluciones** de sistemas de desigualdades
- usarás sistemas de desigualdades para representar situaciones que implican **restricciones**

Puedes hallar la solución de un sistema de ecuaciones si graficas las ecuaciones y localizas los puntos de intersección. Puedes utilizar un método parecido para hallar la solución de un sistema de desigualdades. Lee el Ejemplo A en tu libro. Después lee el ejemplo adicional que se presenta aquí.

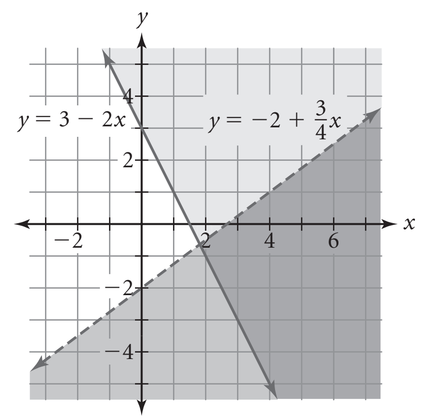
EJEMPLO Grafica este sistema de desigualdades e indica la solución.

$$\begin{cases} y \geq 3 - 2x \\ y < -2 + \frac{3}{4}x \end{cases}$$

▶ ***Solución*** Grafica $y = 3 - 2x$ con una línea sólida, pues sus puntos satisfacen la desigualdad. Sombrea por encima de la recta, ya que su desigualdad tiene el símbolo "mayor que o igual a".

Grafica $y = -2 + \frac{3}{4}x$ con una línea punteada, pues sus puntos no satisfacen la desigualdad. Sombrea por debajo de la recta, ya que la desigualdad y es "menos que" la expresión en x.

Los puntos de la región de traslapo satisfacen ambas desigualdades, así que la región de traslapo es la solución del sistema.



En el Ejemplo B de tu libro se muestra cómo los sistemas de desigualdades son útiles para modelar situaciones que implican **restricciones.** Lee ese ejemplo.

Investigación: Un sobre "típico"

Aquí se presentan dos restricciones que el Servicio Postal de EE.UU. impone al tamaño de los sobres.

- La razón del largo al ancho debe ser menor que o igual a 2.5.
- La razón del largo al ancho debe ser mayor que o igual a 1.3.

Si l y w representan el largo y el ancho de un sobre, entonces la primera restricción puede representarse mediante la ecuación $\frac{l}{w} \leq 2.5$ y la segunda restricción mediante $\frac{l}{w} \geq 1.3$.

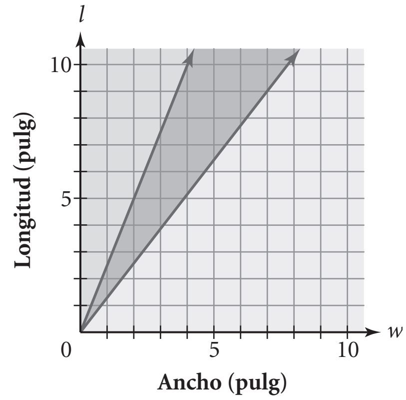
Puedes resolver cada desigualdad para l multiplicando ambos lados por w. Esto da el sistema

$$\begin{cases} l \leq 2.5w \\ l \geq 1.3w \end{cases}$$

(continúa)

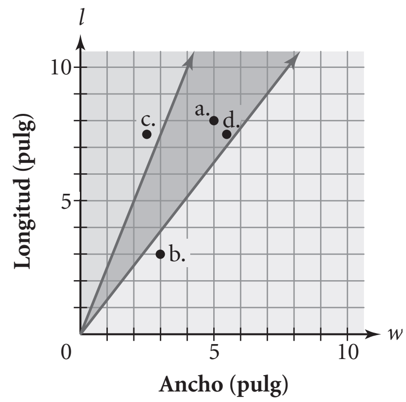
Observa que no necesitas invertir la dirección del símbolo de desigualdad cuando multiplicas ambos lados por *y*, porque el ancho de un sobre debe ser un número positivo.

Aquí se grafican ambas desigualdades en el mismo sistema de ejes.



El traslapo de las regiones sombreadas es la solución del sistema. Puedes verificar esto eligiendo un punto de la región de traslapo y asegurándote de que sus coordenadas satisfacen ambas desigualdades.

En el paso 5 de tu libro se dan las dimensiones de cuatro sobres. Los puntos correspondientes a estos sobres están trazados en esta gráfica. El punto *a,* que corresponde a un sobre de 5 pulg por 8 pulg, y el punto *d,* que corresponde a un sobre de 5.5 pulg por 7.5 pulg, caen dentro de la región de traslapo, lo cual indica que estos sobres satisfacen ambas restricciones.



Observa que el punto (0, 0) satisface el sistema. Este punto corresponde a un sobre que no tiene largo ni ancho, lo cual no tiene sentido. Agregar restricciones que especifiquen largos y anchos máximos y mínimos harían que el sistema fuera un modelo más realista. Por ejemplo, para que un sobre requiera una estampilla de 34¢, el largo debe estar entre 5 pulg y 11.5 pulg, y el ancho debe estar entre 3.5 pulg, y 6.125 pulg. El sistema incluye estas restricciones y tiene esta gráfica.

$$\begin{cases} l \leq 2.5w \\ l \geq 1.3w \\ l \geq 5 \\ w \geq 3.5 \\ l \leq 11.5 \\ w \leq 6.125 \end{cases}$$